USLOV PLASTIČNOG TEČENJA

Postoji više hipoteza koje izražavaju uslove pri kojima dolazi do početka plastičnog tečenja, medjutim širu primenu naišle su hipoteza najvećeg tangencijalnog napona i hipoteza najveće deformacione energije utrošene na promenu oblika

1. Hipoteza najvećeg tangencijalnog napona - Tresca - St. Venant

Prema ovoj hipotezi do plastičnog tečenja metala dolazi u trenutku kada tangencijalni napon dostigne odredjenu kritičnu vrednost. Za slučaj glavnih napona ova hipoteza se može izraziti relacijama:

$$|\sigma_1-\sigma_2| = K, \quad |\sigma_2-\sigma_3| = K, \quad |\sigma_3-\sigma_1| = K \qquad (2.\ )$$

odnosno:

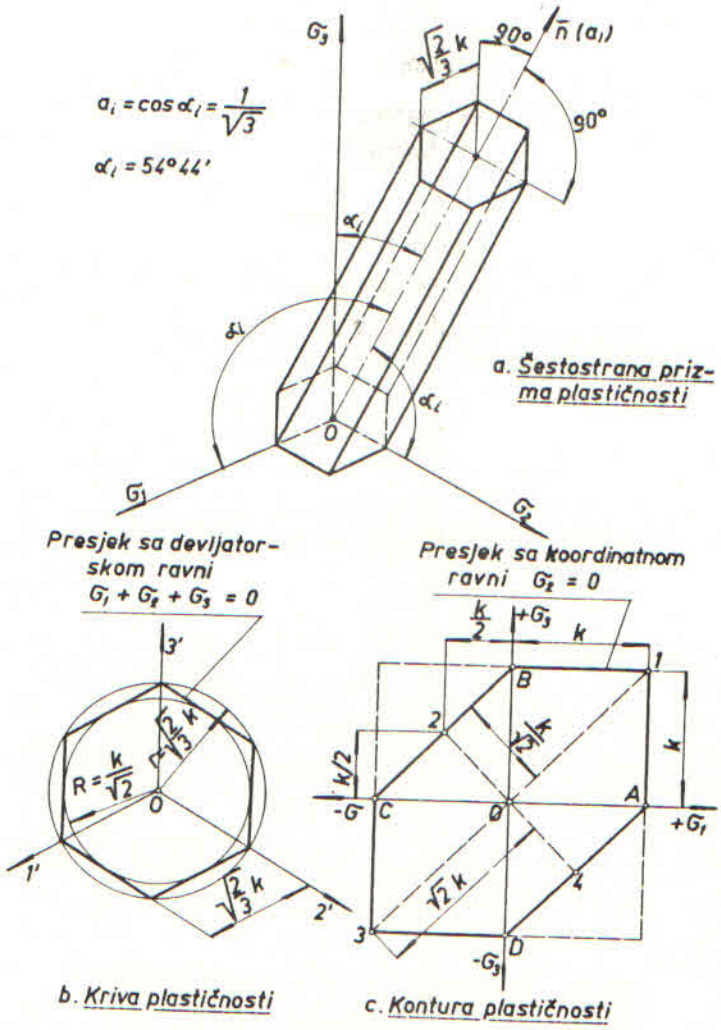
$$\sigma_{max}-\sigma_{min} = K \qquad (2\ )$$

Grafička interpretacija uslova plastičnosti za slučaj prostornog napomskog stanja data je na sl. u obliku šestostrane prizme. Za slučaj ravanskog napomskog stanja (naprimer $\sigma_2=0$) uslov plastičnosti predstavljen je šestougaonikom (sl. ...6) čije su jednačine:

$\sigma_1-\sigma_3 = \pm K$ za $\sigma_1\sigma_3 < 0$

$\sigma_1 = \pm K$ za $\sigma_1\sigma_3 > 0$ i $|\sigma_1| > |\sigma_3|$

$\sigma_3 = \pm K$ za $\sigma_1\sigma_3 > 0$ i $|\sigma_1| < |\sigma_3|$



Sl. 3.6 HIPOTEZA NAJVEĆEG TANGENCIJALNOG NAPONA

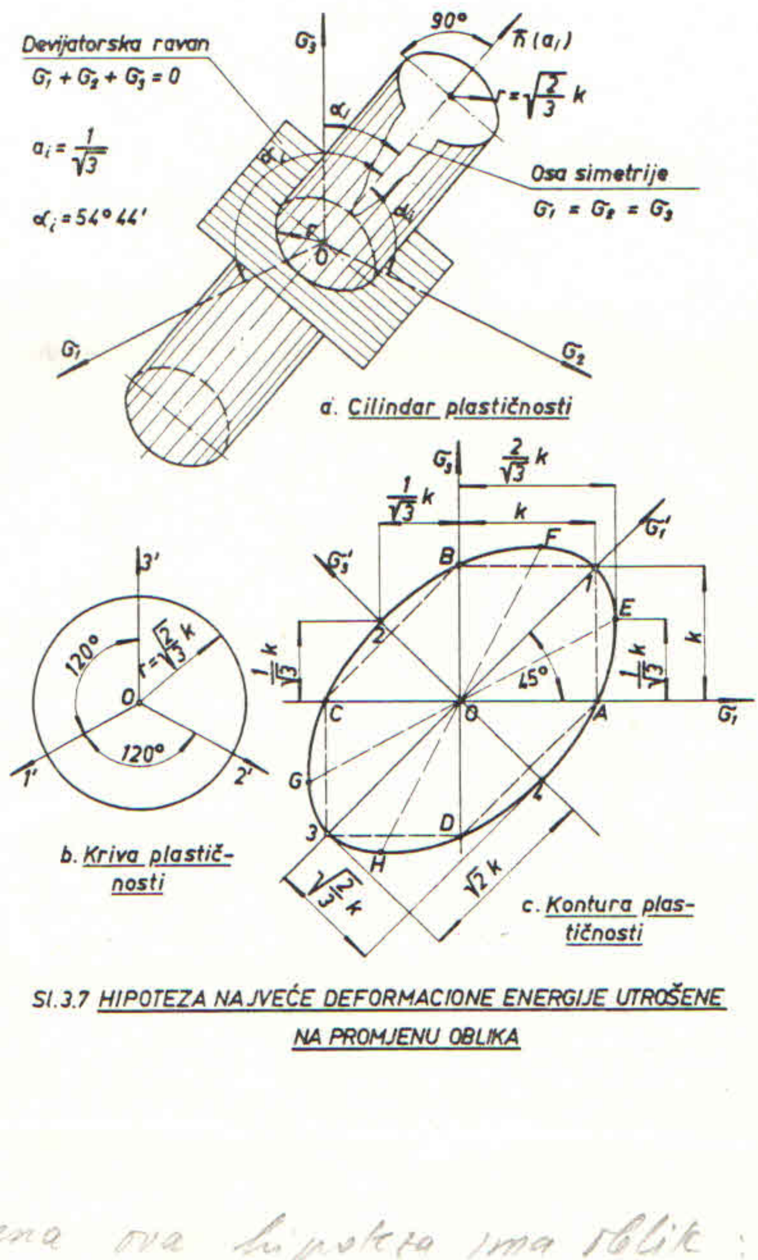
Za ravansko ~~deformacimo~~ naponsko stanje uslov plastičnosti prema ovoj hipotezi ima sledeći oblik:

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = K^2 \qquad (\quad)$$

2. Hipoteza najveće deformacione energije utrošene na promenu oblika — Mises - Huber - Hencky

Prema ovoj hipotezi do plastičnog tečenja metala dolazi u trenutku kada elastična energija promene oblika dostigne određenu kritičnu vrednost. Matema-

- 169 -



Sl. 3.7 HIPOTEZA NAJVEĆE DEFORMACIONE ENERGIJE UTROŠENE NA PROMJENU OBLIKA

tički izražena ova hipoteza ima oblik:

$$(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)=2K^2$$

odnosno za slučaj glavnih napona:

$$\sigma_e=\sqrt{\tfrac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}=K \qquad (\quad)$$

iz čega proizlazi da do plastičnog tečenja metala dolazi u trenutku kada efektivni napon σ_e dostigne napon tečenja K.

Grafička interpretacija Misesovog uslova plastičnosti za prostorno naponsko stanje je nagnuti cilindar (sl. ... a) odnosno elipsa za slučaj ravanskog naponskog stanja (sl. ... b) čija je jednačina:

$$\sigma_x^2 + \sigma_z^2 - \sigma_x\sigma_z - 3\tau_{xz}^2 = K^2$$

ili za slučaj glavnih napona

$$\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_3 = K^2$$

Za ravansko deformaciono stanje ovaj kriterijum ima oblik:

$$(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2 = \frac{4}{3} K^2$$

ili za glavne napone:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}} K = 1{,}15 K$$

Iz dijagrama (sl. ....) vidi se da se uslovi plastičnog tečenja prema hipotezi maksimalnog tangencijalnog napona u određenoj meri razlikuje u odnosu na Misesov kriterijum. Istovetnost kriterijuma postoji u pojedinim tačkama konture plastičnosti (A, B, C, D, 1 i 3) dok najveća razlika postoji u tačkama 2, 4, F i H

Opšti izraz koji objedinjuje razmatrane kriterijume plastičnosti glasi:

$$\sigma_{max} - \sigma_{min} = \beta K \qquad (\quad)$$

pri čemu je β - Lodeov koeficijent koji zavisi od koeficijenta vida napreskog stanja ν_σ:

$$1 \leq \beta = \frac{2}{\sqrt{3+\nu_\sigma^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} = 1{,}155 \qquad (\;)$$

Pri čemu je

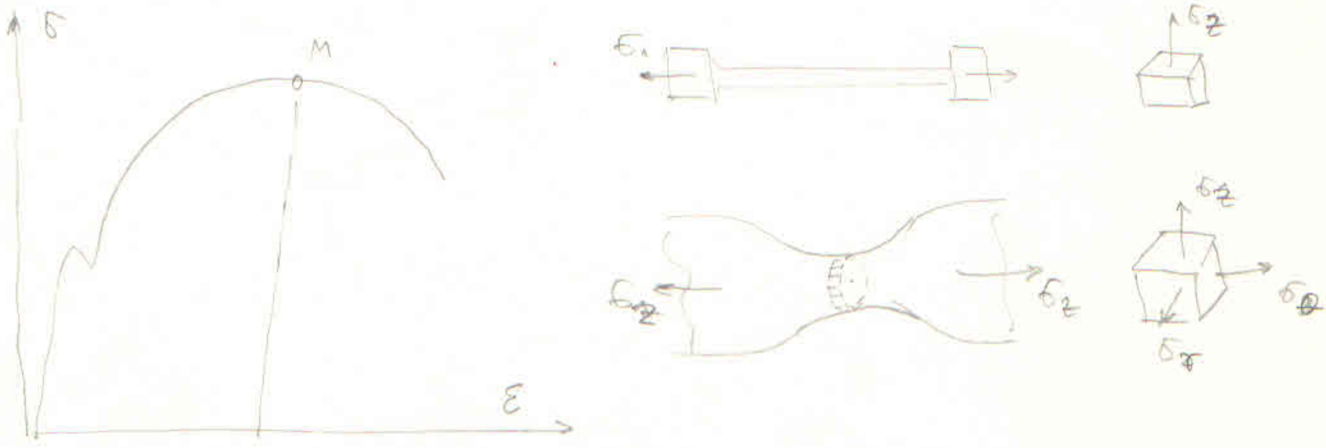
$$\nu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{2\sigma_{sr} - \sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} - \sigma_{min}} \qquad (\;)$$

gde je σ_{sr} srednji napon po veličini u odnosu na druga dva glavna napona.

1. Napisati uslov plastičnog tečenja za slučaj zatezanja epruvete, kako u području ravnomernog tako i u području lokalizovanog deformisanja.

Rešenje

Pri ispitivanju epruvete na zatezanje do pojave lokalizacije deformacija vlada jednoosno naponsko stanje pa uslov plastičnog tečenja prema



Sl. – Ispitivanje zatezanjem

Treskinom kriterijumu glasi $\sigma_z = \sigma_1 = K$, a takođe i prema Misesovom kriterijumu: $\sigma_e = \sigma_1 = K$.

U trenutku pojave lokalizacije deformacija menja se naponska šema (jednoosno naponsko stanje prelazi u troosno). Uslov plastičnosti sada ima oblik:

a) Tresca: $\tau_{max} = \frac{K}{2}$ tj. $\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{K}{2}$, dobivamo

$$\sigma_1 - \sigma_3 = K$$

b) Missesov kriterijum:

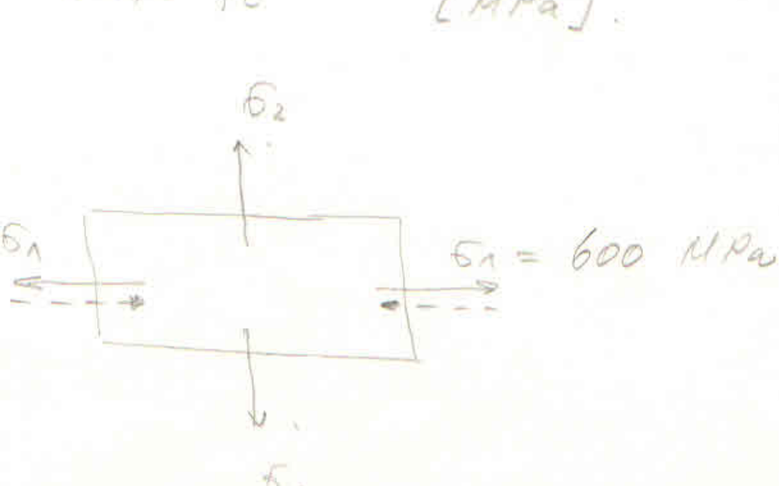
$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2K^2$$

pri čemu je: $\sigma_1 = \sigma_z$ $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_r = \sigma_\theta$ i zamenom u gornji izraz dobija se:

$\sigma_z - \sigma_r = K$ ili preko glavnih napona $\sigma_1 - \sigma_3 = K$, što je identično prethodnom kriterijumu.

2. Primenom Missesovog kriterijuma plastičnosti za šemu opterećenja prema sl. ... odrediti komponentu napona σ_2 za slučaj ~~jednog~~ pozitivnog i negativnog smera komponente σ_1, a u trenutku $\varphi_e = 0{,}5$. Materijal obratka je č.1221 sa krivom tečenja

$$K = 344{,}6 + 512{,}6 \cdot \varphi_e^{0{,}425} \quad [MPa].$$



sl. ....

Dobijeni rezultat uporediti sa Trescinim kriterijumom plastičnosti:

Misesov kriterijum za ravansko naponsko stanje glasi:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2 = K^2$$

Iz krive tečenja za $\varphi_e = 0{,}5$ $K = 726{,}4$ MPa

a) Za $\sigma_1 = 600$ MPa dobija se:

$$\sigma_2^2 - 600\,\sigma_2 - 167657 = 0$$

čije je rešenje $\sigma_2 = -207{,}6$ MPa i

$$\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{K} = \frac{600 + 207{,}6}{726{,}4} = 1{,}11$$

b) za $\sigma_1 = -600$

$$\sigma_2^2 + 600\,\sigma_2 - 167.657 = 0$$

čije je rešenje $\sigma_2 = 207{,}6$ MPa i

$$\beta = \frac{207{,}6 + 600}{726{,}4} = 1{,}11$$

Na osnovu Trescinog kriterijuma plastičnosti dobija se:

a) $\sigma_1 - \sigma_2 = K \rightarrow \sigma_2 = \sigma_1 - K = 600 - 726{,}4 = -126{,}4$

b) $\sigma_2 + \sigma_1 = K \rightarrow \sigma_2 = K - \sigma_1 = 726{,}4 - 600 = 126{,}4$

Koeficijent β u jednačini plastičnosti iznosi:

$$\beta = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{K} = \frac{600 + 207{,}6}{726{,}4} = 1{,}11$$

3. U slučaju lokalizacije deformacija komponenta napona u pravcu z - ose izračunavo se prema Hillu [ ] iznosi:

$$\sigma_z = K\left(1+\frac{2R}{r}\right)\cdot \ln\left(1+\frac{r}{2R}\right)$$

r i R - geometrijske karakteristike zone deformacije (sl.)

Odrediti komponente napomskog stanja za slučaj deformisanja epruvete od Č.1221 polaznog prečnika $d_0 = 20$ mm, u trenutku kada je $r = 6$ mm i $R = 30$ mm.

Rešenje:

Komponente napona σ_r i σ_t određuju se na osnovu jednačine plastičnosti, tj:

$$\sigma_z - \sigma_r = \sigma_z - \sigma_t = K$$

na osnovu čega je:

$$\sigma_r = \sigma_t = K\left[\left(1+\frac{2R}{r}\right)\ln\left(1+\frac{r}{2R}\right)-1\right]$$

Efektivna deformacija za zadate uslove iznosi:

$$\varphi_e = 2\ln\frac{d_0}{d} = 2\cdot\ln\frac{20}{12} = 0{,}5108$$

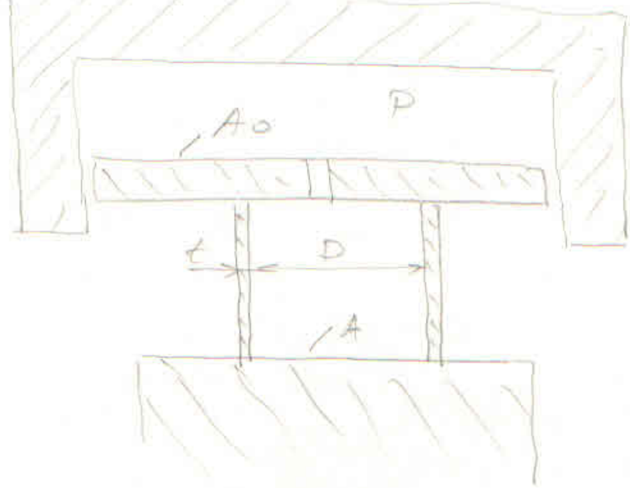
odnosno specifični deformacioni otpor za zadati materijal : $K = 730$ MPa.

Komponente napona iznose :

$$\sigma_z = 730 \left[\left(1 + \frac{2 \cdot 30}{6}\right) \cdot \ln \left(1 + \frac{6}{2 \cdot 30}\right) \right] = 765,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_r = \sigma_t = \sigma_z - K = 765,3 - 730 = 35,3 \text{ MPa.}$$

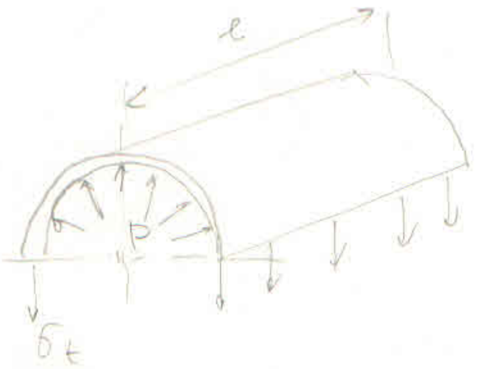
4. Tankozida cev prečnika D i debljine zida t se sabija na presi (sl. ...). Primenom Misesovog kriterijuma plastičnosti odrediti veličinu pritiska p koji je potreban za početak plastičnog oblikovanja ako je odnos površina klipa i cilindra : $A_0/A = 2$ i $A_0/A = 5$.



Johnson :
Nova knjiga
str. 565

Sl.

Rešenje : Komponente napona u tangencijalnom pravcu cevi pod pritiskom može se odrediti na osnovu šeme opterećenja datog na slici



$$\sigma_\theta \cdot 2t = p \cdot D$$

$$\sigma_\theta = \frac{p \cdot D}{2t}$$

Aksijalni napon se takođe može odrediti na osnovu slike :

$$\sigma_z \cdot 2\pi \cdot r \cdot t = (A_0 - A) \cdot p$$

$$\sigma_z = \frac{p \cdot D}{2t} \left(\frac{A_0 - A}{2A}\right) = \sigma_\theta \frac{\alpha}{2}$$

gde je $\alpha = \frac{A_0 - A}{A} = \frac{A_0}{A} - 1$

Misesov kriterijum za ovaj slučaj glasi :

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_\theta)^2 = 2K^2$$

$\sigma_r = 0$

$$\sigma_\theta^2 + \sigma_\theta^2 \frac{\alpha^2}{4} + \sigma_\theta \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 2K^2$$

odakle je :

$$\sigma_\theta = \frac{2K}{\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 4}}$$

a) Za odnos površina $A_0/A = 2$

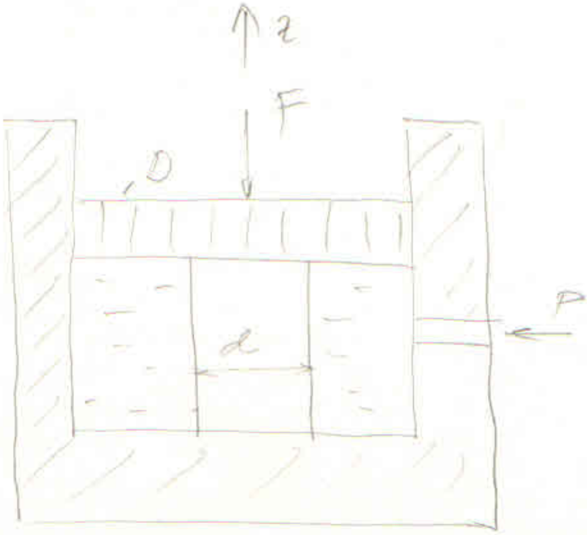
$$\alpha = \frac{A_0}{A} - 1 = 2 - 1 = 1$$

$\sigma_\theta = 2K/\sqrt{7}$ odnosno $p = 4K/D\sqrt{7}$

b) Za odnos površina : $A_0/A = 5$, $\alpha = 4$

$\sigma_\theta = K/\sqrt{6}$, odnosno $p = \dfrac{K/\sqrt{6}}{D\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{K}{3D\sqrt{2}}$

5. Slobodno sabijanje cilindra bez kontaktnog trenja izvodi se u kontejneru u kojem vlada hidrostatički pritisak p. Odrediti promenu napona σ_z i ukupne deformacione sile F u zavisnosti od pritiska u kontejneru. Odrediti pokazatelj naponskog stanja β za slučaj kada je $p = 0$ i $p = K$.



Komponenta napona σ_z može se odrediti iz jednačine plastičnosti:

$$\sigma_z - p = K \rightarrow \sigma_z = p + K$$

Potrebna deformaciona sila:

$$F = p\,(A_0 - A) + \sigma_z A = p\,(A_0 - A) + (p + K)\,A$$

$$F = p \cdot A_0 + K A$$

Pokazatelj naponskog stanja β definisan je izrazom:

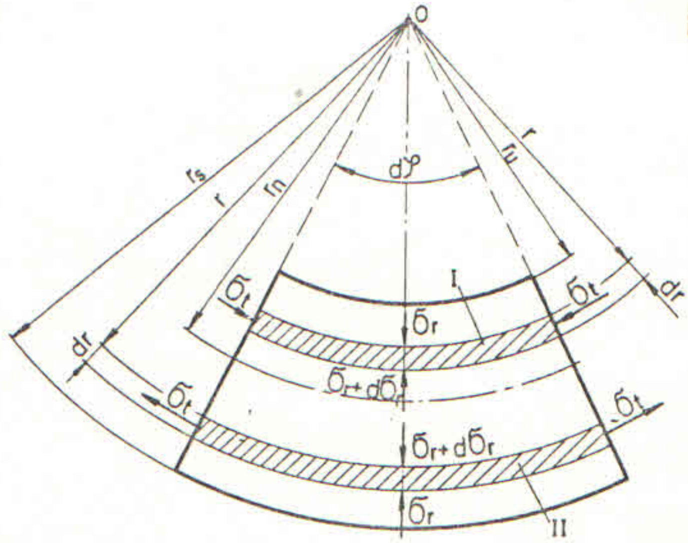
$$\beta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_e} = \frac{\sigma_r + \sigma_t + \sigma_z}{\sigma_e}$$

a) $p = 0 \qquad \beta = -1$

b) $p = K \qquad \beta = \frac{-p - p - (p + K)}{K} = -\frac{4K}{K} = -4$

Na osnovu čega se može zaključiti da hidrostatički pritisak značajno utiče na poboljšanje uslova obrade.

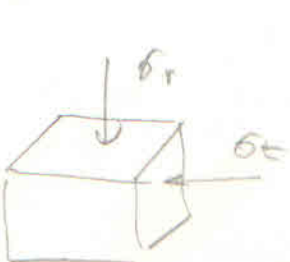
6. Napisati jednačine plastičnosti u zoni deformisanja kod čisto plastičnog savijanja koje se izvodi prema šemi na slici



Rešenje

Kod plastičnog savijanja pojavljuju se različite naponske šeme u zoni unutrašnjeg radiusa savijanja odnosno spoljašnjoj zoni.

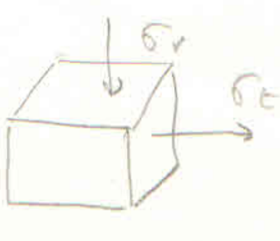
U zoni I deluje istomerna ravanska naponska šema koja se sastoji od komponenti σ_r i σ_t.



Jednačina plastičnosti u ovom slučaju ima oblik:

$$\sigma_t - \sigma_r = \beta K$$

U zoni II deluje raznomerna naponska šema pa jednačina plastičnosti glasi:



$$\sigma_t + \sigma_r = \beta K.$$